2009 年 1 月联考数学真题

1．一家商店为回收资金，把甲乙两件商品以 480 元一件卖出，已知甲商品赚了 20%，乙商品亏了 20%，则商店盈亏结果为（ ）

A．不亏不赚　B．亏了 50 元　C．赚了 50 元　D．赚了 40 元　E．亏了 40 元

【参考答案】E

【知识点】盈亏问题

【名师讲解】$480\times 2-\dfrac{480}{1+20\%}-\dfrac{480}{1-20\%}=960-400-600=-40$, 亏了 40 元

2．某国参加北京奥运会的男女运动员比例原为 19:12。由于先增加若干名女运动员，使男女运动员比例变为 20:13，后又增加了若干名男运动员，于是男女运动员比例最终变为 30:19。如果后增加的男运动员比先增加的女运动员多 3 人， 则最后运动员的总人数为 （ ）

A．686　B．637　C．700　D．661　E．600

【参考答案】B

【知识点】数量变化的比例问题

【名师讲解】原男：女=19:12；增加女运动员后，男:女=20:13，在该过程中男运动员数量没变，故男运动员数能被 20 和 19 整除，增加女运动员后，男：女=20:13，在增加男运动员后，男：女=30:19,；在该过程中女运动员数量没变，故女运动员数能被 13 和 19 整除，最小就是$13\times 19=247$;又男：女=30:19，所以男=13*30=390,390+247=637，选 B

3．某工厂定期购买一种原料。已知该厂每天需用该原料 6 吨，每吨价格 1800 元，原料保管等费用平均每吨 3 元，每次购买原料需支付运费 900 元。若该厂要使平均每天支付的总费用最省，则应该每（ ）天购买一次原料。

A．11　B．10　C．9　D．8　E．7

【参考答案】B

【知识点】平均值定理求最值

【名师讲解】设 x 天购买一次原料，总成本 y，则有

$$y=1800\times 6x+(3\times 6+2\times 3\times 6+3\times 3\times 6+\ldots+x\times 3\times 6)+900$$

$$=1800\times 6x+900+18(\frac{1+x}{2})x$$

平均每天花费$=1800\times 6+\dfrac{900}{x}+9x+9$, 根据均值定理$x=10$时花费最小，选 B

4．在某实验中，三个试管各盛水若干克。现将浓度为 12%的盐水 10 克倒入 A 管中，混合后取 10 克倒入 B 管中，混合后再取 10 克倒入 C 管中，结果 A，B，C 三个试管中盐水的浓度分别为 6%、2%、0.5%，那么三个试管中原来盛水最多的试管及其盛水量各是（ ）

A．A 试管，10 克　　B．B 试管，20 克　　C．C 试管，30 克
D．B 试管，40 克　　E．C 试管，50 克

【参考答案】C
【知识点】溶液混合问题
【名师讲解】A 试管: $12\%\times 10 = 6\%\times(A+10)\Rightarrow A=10$

B 试管: $6\%\times 10 = 2\%\times(B+10)\Rightarrow B=20$

C 试管: $2\%\times 10 = 0.5\%\times(C+10)\Rightarrow C=30$，选 C

5．一艘轮船往返航行于甲、乙两码头之间。若船在静水中的速度不变，则当这条河的水流速度增加 50%时，往返一次所需的时间比原来将（ ）
A．增加　B．减少半个小时　C．不变　D．减少 1 个小时　E．无法判断

【参考答案】A
【知识点】顺水逆水问题
【名师讲解】设船在静水中的速度为 v_1，水流速度为 v_2，

$$t_1=\frac{S}{v_1+v_2}+\frac{S}{v_1-v_2}\Rightarrow t_1=\frac{2v_1}{{v_1}^2-{v_2}^2}\cdot s$$

$$t_2=\frac{S}{v_1+1.5v_2}+\frac{S}{v_1-1.5v_2}\Rightarrow t_1=\frac{2v_1}{{v_1}^2-2.25{v_2}^2}\cdot s$$ 所以 $t_1<t_2$，选 A

6．方程的 $|x-|2x+1||=4$ 根是（ ）

A．$x=-5$ 或 $x=1$　B．$x=5$ 或 $x=-1$　C．$x=3$ 或 $x=-\frac{5}{3}$

D．$x=-3$ 或 $x=\frac{5}{3}$　E．不存在

【参考答案】C
【知识点】双层绝对值方程求根
【名师讲解】直接采用验证法，将选项带入提干，显然当 $x=3$ 满足题目条件，故排除后选 C

7. $3x^2+bx+c=0(c\neq 0)$ 的两个根为 α 、β ，如果又以 $\alpha+\beta,\alpha\beta$ 为根的一元二次方程

是 $3x^2-bx+c=0$,则 b 和 c 分别为（　　）。

A　2，6　　B　3，4　　C　-2，-6　　D　-3，-6　　E　以上结果都不正确

【参考答案】D
【知识点】两个方程的韦达定理
【名师讲解】

方程一得到：$\begin{cases} x_1=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{3} \\ x_2=\alpha\beta=\dfrac{c}{3} \end{cases}$；推出方程$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{c-b}{3}=\dfrac{b}{3} \\ x_1x_2=-\dfrac{bc}{9}=\dfrac{c}{3} \end{cases}$；

所以$\begin{cases} b=-3 \\ c=-6 \end{cases}$ 选 D

8．若 $(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^n=a_1(x-1)+2a_2(x-1)^2+\ldots+na_n(x-1)^n$，则

$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=$（　　）。

A $\dfrac{3^n-1}{2}$　B $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$　C $\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$　D $\dfrac{3^n-3}{2}$　E $\dfrac{3^n-3}{4}$

【参考答案】C
【知识点】计算整式的数值、等比数列求和
【名师讲解】对比系数可以发现，令 $x=2$,带入公式

$a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n=(1+2)+(1+2)^2+\ldots+(1+2)^n=\dfrac{3^{n+1}-3}{2}$，选 C

9．在 36 人中，血型情况如下：A 型 12 人，B 型 10 人，AB 型 8 人，O 型 6 人。若从中随机选出两人，则两人血型相同的概率是（ ）

A $\dfrac{77}{315}$　B $\dfrac{44}{315}$　C $\dfrac{33}{315}$　D $\dfrac{9}{122}$　E 以上结论都不正确

【参考答案】A
【知识点】分组取样

【名师讲解】在 36 人中，随机选 2 人，总的选取方法数 $C_{36}^2=630$，相同的血型的选取方法数：

$C_{12}^2+C_{10}^2+C_8^2+C_6^2=154$，所以概率为：$p=\dfrac{154}{630}=\dfrac{77}{315}$，选 A

10．湖中有四个小岛，它们的位置恰好近似成正方形的四个顶点。若要修建三座桥将这四个小岛连接起来，则不同的建桥方案有（ ）种。

A 12　B 16　C 18　D 20　E 24

【参考答案】B
【知识点】总体减去不符合要求的

【名师讲解】正方形 4 条边+2 条对角线=6 条,从中任取 3 条修桥，有 $C_6^3=20$ 种，排除三边能构成

三角形的 4 种情况（无法将 4 个岛连接起来），则能连接 4 岛的有 20-4=16 种，选 B

11. 若数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n \neq 0(n \geq 1)$，$a_1 = \dfrac{1}{2}$ 前 n 项和 S_n 满足 $a_n = \dfrac{2S_n^{\ 2}}{2S_n - 1}(n \geq 2)$，则 $\{\dfrac{1}{S_n}\}$ 是（ ）

A 首项为 2，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列　　B 首项为 2，公比为 2 的等比数列

C 既非等差数列也非等比数列　　D 首项为 2，公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列

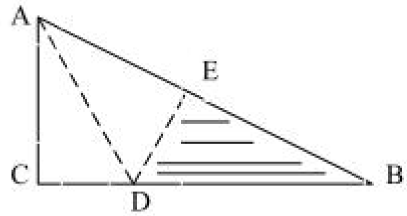
E 首项为 2，公差为 2 的等差数列

【参考答案】E
【知识点】等差数列、等比数列的判定

【名师讲解】$a_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{2S_n^2}{2S_n - 1} \Rightarrow S_{n-1} - S_n = 2S_nS_{n-1}$;两边同时除以 S_nS_{n-1}，则有

$\dfrac{1}{S_n} - \dfrac{1}{S_{n-1}} = 2$ 又 $a_1 = s_1$，所以 $\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$ 是以首项为 2，共差为 2 的等差数列，选 E.

12 直角三角形 ABC 的斜边 AB=13 厘米，直角边 AC=5 厘米， 把 AC 对折到 AB 上去与斜边相重合，点 C 与点 E 重合，折痕为 AD（如图），则图中阴影部分的面积为（ ）



A 20　　B $\dfrac{40}{3}$　　C $\dfrac{38}{3}$　　D 14　　E 12

【参考答案】B
【知识点】折叠图形面积计算

【名师讲解】已知 AB=13，AC=5，则直角三角形的面积为 30，设 $S_{\Delta ACD} = S_{\Delta AED} = x$，因为 AC=AE=5；所以 BE=8，所以 $S_{\Delta BED} : S_{\Delta AED} = 8:5$，所以 $S_{\Delta BED} = \dfrac{8}{5}x$；$\dfrac{8}{5}x + x + x = 30 \Rightarrow x = \dfrac{25}{3}$；所以 $S_{\Delta BED} = \dfrac{8}{5} \times \dfrac{25}{3} = \dfrac{40}{3}$；选 B.

13 设直线 $nx + (n+1)y = 1$（n 为正整数）与；两坐标轴围城的三角形面积 S_n（$n = 1, 2...., 2009$）,则 $S_1 + S_2 + ... + S_{2009} =$（ ）

A $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2009}{2008}$　B $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2008}{2009}$　C $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2009}{2010}$　D $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2010}{2009}$　E 以上结论都不正确

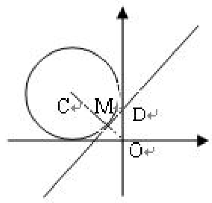
【参考答案】C
【知识点】三角形面积求和

【名师讲解】直线与 x 轴焦点为$(\frac{1}{n},0)$，与 y 轴焦点$(0,\frac{1}{n+1})$，$S_n=\frac{1}{2}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

故$S_1+S_2+...+S_{2009}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}\right)=\frac{1}{2}\bullet\frac{2009}{2010}$，选 C

14 若圆$C:\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$与 X 轴交于 A 点,与 Y 轴交于 B 点,则与此圆相切于劣弧 AB 中点注 M（注：小于半圆的弧称为劣弧）的切线方程是（　　）

A $y=x+2-\sqrt{2}$　　B $y=x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}$　　C $y=x-1+\frac{1}{\sqrt{2}}$



D $y=x-2+\sqrt{2}$　　E $y=x+1-\sqrt{2}$

【参考答案】A
【知识点】求切线方程

【名师讲解】如图，显然直线的斜率为 1，再求出 y 轴上的截距，即求出OD即可，由于$OC=\sqrt{2}$，所以$OM=OC-MC=\sqrt{2}-1$,因为图形中存在等腰直角三角形，且$OM\perp OD$,所以$OD=\sqrt{2}OM=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=2-\sqrt{2}$,所以切线方程为$y=x+2-\sqrt{2}$，选 A

15　已知实数a，b，x，y满足$y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|=1-a^2$和$|x-2|=y-1-b^2$，则

$3^{x+y}+3^{a+b}=$（　　）

A　25　　B　26　　C 27　　D　28　　E　29

【参考答案】D
【知识点】非负性

【名师讲解】依题意可得，$y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|-1+a^2=0$，$|x-2|-y+1+b^2=0$,两式相加得到$|\sqrt{x}-\sqrt{2}|+|x-2|+a^2+b^2=0$，所以$x=2,a=b=0$,再带入$y+|\sqrt{x}-\sqrt{2}|-1+a^2=0$可以得$y=1$，所以$3^{x+y}+3^{a+b}=3^{2+1}+3^0=28$，选 D

16 $a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+...+a_n{}^2=\frac{1}{3}(4^n-1)$

（1）　数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$

（2）　在数列$\{a_n\}$中，对人员正整数 n，有$a_1+a_2+a_3+...+a_n=2^n-1$

【参考答案】B

【知识点】数列元素的平方求和

【名师讲解】（1）$a_1=2$，$a_1^{\ 2}=4\neq\frac{1}{3}(4^n-1)$ ，不充分；（2）$a_1+a_2+a_3+...+a_n=S_n=2^n-1$，所以$a_n=s_n-s_{n-1}=2^{n-1}$，$a_1=1$，公比$q=2$，$\{a_n^{\ 2}\}$也为等比数列，$a_1^{\ 2}=1$，$q'=4$，$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+...+a_n^{\ 2}=\frac{1}{3}(4^n-1)$ ，充分，选 B

17 A 企业的职工人数今年比前年增加了 30%。

（1）A 企业的职工人数去年比前年减少了 20% ；

（2）A 企业的职工人数今年比去年增加了 50% 。

【参考答案】E

【知识点】前年、去年、今年三个百分比的关系

【名师讲解】单独都不成立，联合设前年人工人数为 x，则去年是$\left(1-20\%\right)x$, 今年的人数为$\left(1-20\%\right)x(1+50\%)$，则$\frac{\left(1-20\%\right)x(1+50\%)-x}{x}\times100\%=20\%\neq30\%$不充分，选 E.

18 $|\log_a{}^x|>1$

（1）$x\in[2,4],\frac{1}{2}<a<1$

（2）$x\in[4,6],1<a<2$

【参考答案】D

【知识点】对数不等式

【名师讲解】条件（1）当$\frac{1}{2}<a<1$时，$\log_a{}^x$为减函数且在$x\in[2,4]$时$\log_a{}^x<0$，所以$|\log_a{}^x|$为增函数，且$\frac{1}{2}<a<1$最小值$\left|\log_a 2\right|>1$，充分；条件（2）当$x\in[4,6],1<a<2$，$\log_a{}^x$=$|\log_a{}^x|$为增函数，最小值 $|\log_a{}^x|>1$，所以选 D

19 对于使$\frac{ax+7}{bx+11}$有意义的一切的 x 值，这个分数为一个定值。

（1）$7a-11b=0$

（2）$11a-7b=0$

【参考答案】B

【知识点】分式的化简

【名师讲解】（1）$7a-11b=0$，令$a=11,b=7\Rightarrow\frac{ax+7}{bx+11}=\frac{11x+7}{7x+11}$，为定值，不充分；（2）

$11a-7b=0$，$a=\frac{7}{11}b,\frac{ax+7}{bx+11}=\frac{\frac{7}{11}bx+7}{bx+11}=\frac{7}{11}\times\frac{bx+11}{bx+11}=\frac{7}{11}$ 充分 ，选 B

20 $\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\frac{1}{134}$

（1）a,b 均为实数，且$|a^2-2|+(a^2-b^2-1)^2=0$

（2）a,b 均为实数，且$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$

【参考答案】D
【知识点】分式运算

【名师讲解】（1）$|a^2-2|+(a^2-b^2-1)^2=0\Rightarrow\begin{cases}a^2=2\\b^2=1\end{cases}\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\frac{1}{134}$， 充分；

（2）$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1\Rightarrow(a^2+b^2)(a^2-2b^2)=0\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\frac{1}{134}$充分，选 D

21 $2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}=-1$

（1） a 是方程$x^2-3x+1=0$的根

（2） $|a|=1$

【参考答案】A
【知识点】表达式化简计算

【名师讲解】（1）a 是方程$x^2-3x+1=0$的根，所以$a^2+1=3a,a+\frac{1}{a}=3$，$2a^2-5a=a-2$，$2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}=a-2-2+\frac{1}{a}=-1$，充分；（2）将$a=\pm1$带入$2a^2-5a-2+\frac{3}{a^2+1}\neq-1$，不充分，选 A

22 点(s,t)落入圆$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$内的概率为$\frac{1}{4}$

（1） s,t 是连续掷一枚骰子两次所得到的点数,$a=3$
（2） s,t 是连续掷一枚骰子两次所得到的点数,$a=2$

【参考答案】B
【知识点】掷骰子问题

【名师讲解】（1）$a=3,(x-3)^2+(y-3)^2=9$ (s,t)的所有可能取值有$C_6^1C_6^1=36$种, s,t 只要小于

6 就能满足上式即 $C_5^1C_5^1=25$，$P=\dfrac{25}{36}$，不充分；（2）$a=2,(x-2)^2+(y-2)^2=4$ (s,t) 的所有可能取值有 $C_6^1C_6^1=36$ 种，能满足落在圆内的情况有 9 种，$P=\dfrac{1}{4}$，充分，选 B

23 $(x^2-2x-8)(2-x)(2x-2x^2-6)>0$

（1）$x\in(-3,-2)$

（2）$x\in[2,3]$

【参考答案】E
【知识点】高次不等式解法
【名师讲解】

$(x^2-2x-8)(2-x)(2x-2x^2-6)>0\Leftrightarrow(x^2-2x-8)(x-2)(x^2-x+3)>0$

$\Leftrightarrow(x^2-2x-8)(x-2)>0\Leftrightarrow(x-2)(x-4)(x+2)>0$,用穿线法直接可以解得 $-2<x<2$ 或 $x>4$，所以（1）（2）都不充分，选 E

24 圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 和直线 $(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y-3-3\lambda=0$ 相交于两点

（1）$\lambda=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

（2）$\lambda=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

【参考答案】D
【知识点】直线与圆的位置关系
【名师讲解】法（1）：根据直线与圆相交的条件: $d<r$，即 $d=\dfrac{|3\lambda|}{\sqrt{(1+2\lambda)^2+(1-\lambda)^2}}<r=2,$ 从而 $(\lambda+2)^2>0,$ 即对于任意的 λ 均可以，（1）（2）都充分。法（2）：直线 $(1+2\lambda)x+(1-\lambda)y-3-3\lambda=0$ 恒过点（2,1），点（2,1）在圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的内部，所以直线与圆恒有两个交点，所以（1）（2）都充分，选 D

25 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $S_{19}:T_{19}=3:2$

（1）$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是等差数列

（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$

【参考答案】C

【知识点】两个等差数列的求和之比

【名师讲解】显然单独都不充分，因为$\{a_n\}$的前 n 项和S_n与$\{b_n\}$的前 n 项和T_n；又因为（1）$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列（2）$a_{10}:b_{10}=3:2$，根据公式：$\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}=\frac{a_k}{b_k}$得 $S_{19}:T_{19}=2a_{10}:2b_{10}=3:2$，所以（1）（2）联合充分，选 C